SEMINARSKA NALOGA IZ FIZIKE

# *NIHANJE*

VZMETNO, MATEMATIČNO IN FIZIČNO NIHALO

Katjuša Reja Mozetič
Politehnika Nova Gorica
Šola za znanost o okolju, študjski program  Okolje

Nihanje je v naravi zelo pogost pojav. Niha predmet, ki ga obesimo na vrvico, utež na vzmeti, opna v zvočniku, struna na kitari in stene zgradbe, kadar pelje mimo težak tovornjak. Električno nihanje je osnova radijskih in televizijskih aparatov ter računalnikov. In vsi atomi v trdnih snoveh nihajo okoli svoje ravnovesne lege.

**VIRI:**


- Janez Strnad, FIZIKA- prvi del
- Internet : http.//www-rcp.ijs-si/~dean/predavanja/nihanje.doc
- zapiski predavanj


# VSEBINA:


- *opis nihanja*
- *odmik, hitrost, pospešek pri sinusnem gibanju*
- *vzmetno nihalo*
- *matematično nihalo*
- *fizično nihalo*
- *energija pri nihanju*
- *tri rešene naloge*

*Kakšno gibanje je nihanje in kaj je značilno za harmonično nihanje?*

Nihanje v širšem pomenu besede je vsako periodično gibanje. Navadno pa mislimo s tem na sinusno ( harmonično) gibanje. Napravo, ki niha imenujemo nihalo. Če nihalo izmaknemo iz ravnovesne lege, prične nihati. Giblje se najprej proti ravnovesni legi in dalje v tej smeri, dokler se ne ustavi. Nato se prične gibati v nasprotno smer, gre skozi ravnovesno lego in naprej, dokler se ponovno ne ustavi. Pri tem opravi nihalo en nihaj. In vse se ponovi znova. Tako gibanje je posledica sile, ki skuša vrniti nihalo v ravnovesno lego. Odmik $\boldsymbol{x}$ iz ravnovesne lege je:

$$\boxed{x = x_0 \sin(\omega t+\varphi)}$$

Funkcijo sin lahko zamenjamo s cos (običajno kadar je nihalo ob času t=0 v $x=x_0$ za lažje računanje).

$\boldsymbol{x_0}$ je amplituda, maksimalni odmik

$\boldsymbol{\omega}$ je krožna frekvenca :

$$\boxed{\omega=2\pi\nu= 2\pi/ T}$$

$\boldsymbol{\nu=1/T}$ je lastna frekvenca nihala, merimo jo z enoto Hz (herc), oziroma $\mathbf{s^{-1}}$

$\boldsymbol{T}$ je nihajni čas, to je čas enega nihaja

količina $\boldsymbol{(\omega t+\varphi)}$ je faza in $\boldsymbol{\varphi}$ je fazni premik , ki nam pove, kje je bilo nihalo ob času t=0

*<u>Kako se odmik iz ravnovesne lege spreminja s časom?</u>*
*<u>Kakšna je največja hitrost in pospešek?</u>*

**Odmik** iz ravnovesne lege je po velikosti : $-x_o \leq x \leq x_o$

**Hitrost** *:* $\boxed{v = dx/dt = x_o\omega\cos(\omega t+\varphi)}$

Največja hitrost, amplituda hitrosti je: $v_o = x_o\omega$

**Pospešek** *:* $\boxed{a = dv/dt = -\ x_o\omega^2 \sin(\omega t+\varphi)}$

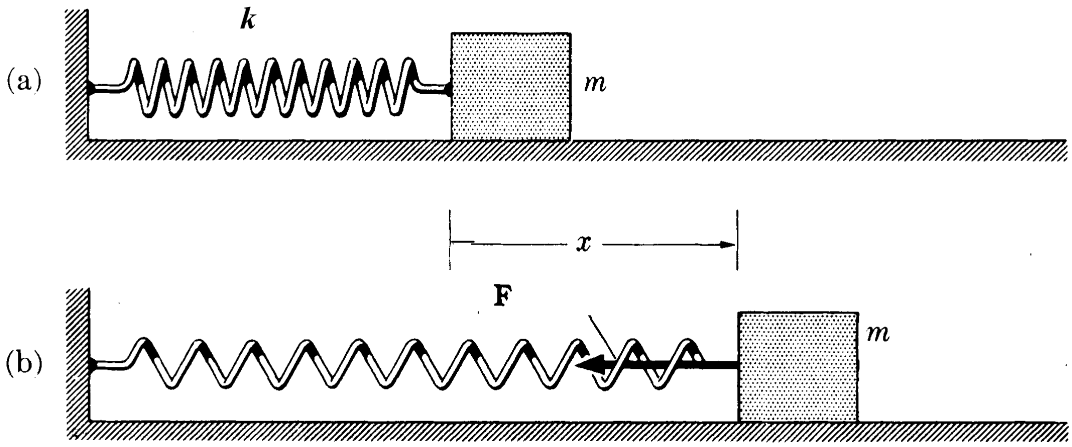
Največji pospešek, amplituda pospeška je: $a_0 = x_o\ \omega^2$

Enačbo za pospešek lahko zapišemo tudi:

$$\boxed{a = -\ \omega^2 x}$$

Ta enačba je značilna za sinusno nihanje. Pove nam, da je ***pospešek sorazmeren z odmikom*** in da kaže vedno proti ravnovesni legi. Sorazmernostni koeficient je kvadrat krožne frekvence.

# VZMETNO NIHALO




Telo z maso *m,* ki je pripeto na vzmeti, premaknemo iz ravnovesne lege za *x*. Na telo deluje zunanja sila vzmeti $\boldsymbol{F = k \cdot x}$ v smeri proti ravnovesni legi. Po 2.Newtonovem zakonu in Hookovem zakonu za vzmet velja :

$$\boldsymbol{F = a \cdot m}$$

oziroma $\boldsymbol{-k \cdot x = m \cdot a}$

Enačba $\boldsymbol{a = -(k/m)x}$

ima obliko, ki je značilna za sinusno nihanje ( $a = - \omega^2 x$ ). Telo na vzmeti niha sinusno okoli ravnovesne lege

$$\boldsymbol{x = x_0 \sin(\omega t + \varphi)}$$

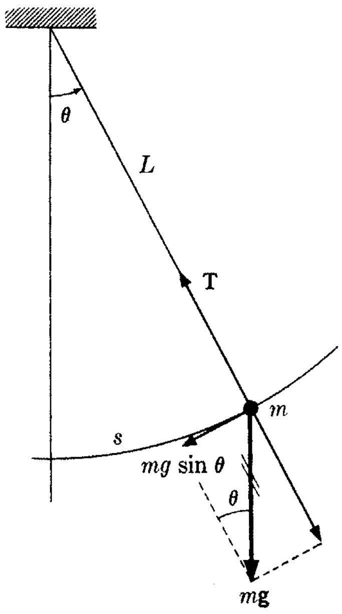
s krožno frekvenco:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Nihajni čas nihala je:

$$\boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

# MATEMATIČNO NIHALO




Majhno telo z maso $\boldsymbol{m}$ obesimo na tanki vrvici z dolžino $\boldsymbol{L}$. Telo premaknemo iz ravnovesne lege za kot $\boldsymbol{\theta}$. Nihalo zaniha in potuje po loku $\boldsymbol{s = L \cdot \theta}$ .

Sila, ki povzroči nihanje je komponenta sile teže, ki je pravokotna na vrvico

$$F_t = m \cdot a_t = - m \cdot g \cdot \sin\theta$$

Pospešek $a_t = - g \sin\theta$ ni premo sorazmeren z odmikom $\boldsymbol{s}$ , zato nihanje nitnega nihala v splošnem ni harmonično. Samo za dovolj majhne kote ( θ < 5° ) velja približno $\sin\theta \approx \theta$ in dobimo:

$$a_t = - g\,\theta \quad \left( = -g\left(\frac{s}{L}\right) = - \omega^2 s\right)$$

$$L\alpha = - g\,\theta$$

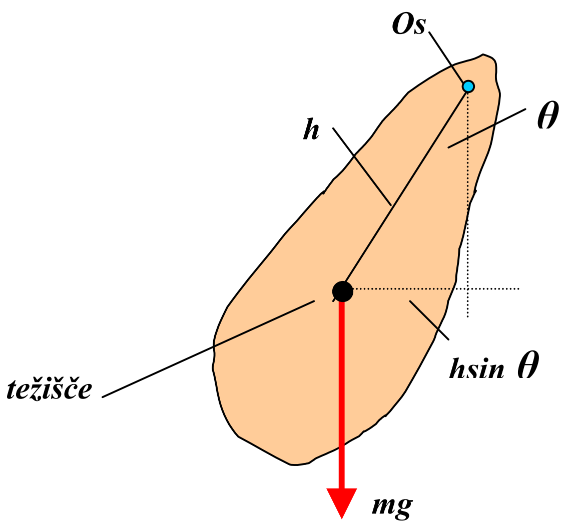
$$\alpha = -\left(\frac{g}{L}\right)\theta \qquad \text{rešitev:} \quad \theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Krožna frekvenca matematičnega nihala je: $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$

Nihajni čas je: $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$

# FIZIČNO NIHALO

Fizično nihalo je vsako togo telo, vrtljivo okoli vodoravne osi, ki ne gre skozi težišče.




Navor teže pri odklonu iz ravnovesne lege za kot $\theta$ je:

$$M = -m \cdot g \cdot h \cdot \sin\theta = J \cdot \alpha$$

$J$ je vztrajnostni moment togega telesa okoli osi. Za majhne kote velja približno ( $\sin\theta \approx \theta$) od koder sledi:

$$\alpha = -(m \cdot g \cdot h / J) \cdot \theta$$

Nihalo niha sinusno:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Krožna rekvenca je : $\boxed{\omega = \sqrt{mgh/J}}$

Nihajni čas : $T = 2\pi\sqrt{J/mgh}$

# ENERGIJA PRI NIHANJU

Dodatna zunanja sila ali navor opravi delo, ko nihalo, ki je spočetka v ravnovesni legi, premakne iz te lege. Če odmislimo delo upora, velja zakon o ohranitvi energije nihala.

Energija nihala na vijačno vzmet, ki niha v vodoravni smeri, je sestavljena iz kinetične energije in prožnostne energije vzmeti:

$$\boldsymbol{W_0 = W_K + W_{Pr} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x^2}$$

Nihalo, ki sinusno niha ima kinetično energijo:

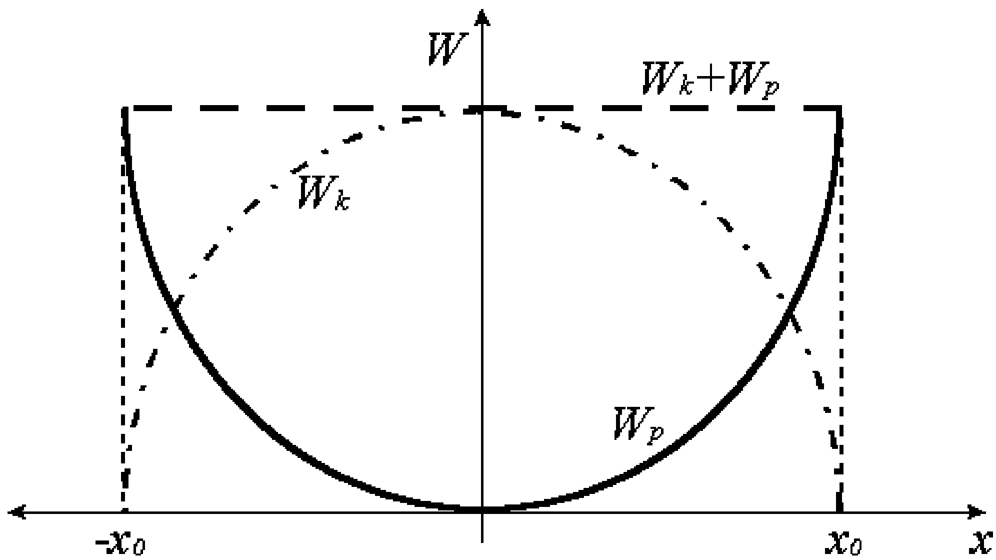
$$\boldsymbol{W_K = \frac{1}{2} m\, x_o^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}$$

in prožnostno energijo:

$$\boldsymbol{W_{Pr} = \frac{1}{2} k\, x_o^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}$$

Vsota $\boldsymbol{W_K}$ in $\boldsymbol{W_{Pr}}$ je konstantna in je enaka energiji mihanja, ta pa je enaka maximalni kinetični energiji in maximalni prožnostni energiji:

$$\boldsymbol{W_0 = \frac{1}{2} m\, x_o^2 \omega^2 = \frac{1}{2} k\, x_o^2}$$



REŠENE NALOGE:

1.V vodo potopimo leseno kocko s stranico 5cm. Ko jo spustimo zaniha v vertikalni smeri okoli ravnovesne lege. Kolikšna je lastna frekvenca tega nihanja? (gostota vode je $1 kg/dm^3$, lesa pa $0.7 kg/dm^3$).

$S=5cm= 5\cdot 10^{-2}m$

$\rho_{vode}=1kg/dm^3=1000kg/m^3$

$\rho_{lesa}=0,7kg/dm^3=700kg/m^3$

---

$\nu$ nihanja = ?

Ko kocka lebdi na vodi so sile v ravnovesju in je vzgon enak teži kocke:

$$F_V = m \cdot g = \rho_{lesa} \cdot S^3 \cdot g$$

Kocko potisnemo za X v vodo, vzgon se poveča za :

$$\Delta F_V = \rho_{vode} \cdot S^2 \cdot g \cdot X$$

Ta sila pospešuje kocko, ko jo spustimo proti površini vode:

$$\rho_{vode} \cdot S^2 \cdot g \cdot X = -a \cdot m_{kocke}$$

Če ne upoštevamo upora, kocka sinusno zaniha. Enačbo lahko napišemo v obliki:
$a = -\omega^2 \cdot X$ , dobimo:

$$a = -\frac{\rho_{vode} \cdot S^2 \cdot g}{m_{kocke}} \cdot X$$

$$\omega^2 = -\frac{\rho_{vode} \cdot S^2 \cdot g}{m_{kocke}}$$ ; vstavimo za $m_{kocke} = \rho_{lesa} \cdot S^3$

$$\omega^2 = \frac{\rho_{vode} \cdot S^2 \cdot g}{\rho_{lesa} \cdot S^3} = \frac{\rho_{vode} \cdot g}{\rho_{lesa} \cdot S}$$

Frekvenca takega nihanja je:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{\rho_{vode} \cdot g}{\rho_{lesa} \cdot S}}}{2\pi} = \underline{\underline{2,6 s^{-1}}}$$

2.Kolikšna je kinetična energija in potencialna energija matematičnega nihala dolžine 3m v trenutku, ko nit oklepa kot $15^0$ z navpičnico.Masa obešene kroglice je 1kg, največji odklon nihala je $30^0$. Nihalo v tem primeru ne niha periodično.Sinusno gibanje dobimo samo pri malih amplitudah nihanja, kjer lahko prevzamemo da velja $\varphi_0 \approx \varphi$ . Pri poljubni amplitudi $\varphi_0$ pa nihajni čas nihala ni odvisen le od dolžine L in težnega pospeška g, ampak tudi od amplitude: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + ...\right)$

Oceni kolikšna je relativna napaka pri računanju nihajnega časa v danem primeru.

Vsota kinetične in potencialne energije je enaka maksimalni kinetični energiji ($W_{kmax}$ ) in maksimalni potencialni energiji($W_{pmax}$). Ko je nihalo odklonjeno za $\varphi_0$ miruje, zato ima samo potencialno energijo.

$$W_{p\max} = mgh \qquad \left(\begin{matrix} h = ? \\ L - h = L\cos 30^0 \end{matrix}\right)$$

$$W_{p\max} = mgL\left(1 - \cos 30^0\right)$$

Ta energija se pri manjšem odklonu deloma ″ prelije ″ v $W_k$ .

$$W_{p\max} = W_p + W_k$$

$$mgL\left(1 - \cos 30^0\right) = mgL\left(1 - \cos 15^0\right) + W_k$$

$$W_p = \underline{\underline{1J}}$$
$$W_k = \underline{\underline{2,94J}}$$

Relativna napaka pri računanju nihajnega časa je:

$$T_{real} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + ...\right) = \underline{\underline{3,535s}}$$

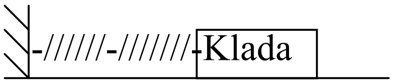
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \underline{\underline{3,476s}}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{0,059s}{3,476s} = \underline{\underline{0,017}}$$

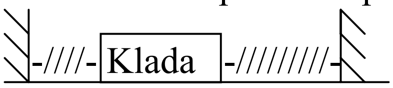
Relativna napaka je 1,7%.

3.Klada z maso 0,5kg leži na gladki vodoravni podlagi. Na steno je pripeta z dvema vzmetema z različnima koeficientoma vzmeti ($k_1$=300N/m, $k_2$=500N/m). Izračunaj nihalni čas za naslednja dva primera vpetja klade:

a. Vzmeti sta vpeti zaporedno med klado in steno.




b. Vzmeti sta vpeti v nasprotni steni in držita klado iz nasprotnih strani.




a. Klado premaknemo za $x_0$ iz ravnovesne lege. Celotni raztezek $x_0 = x_1 + x_2$ ( $x_1$-raztezek prve vzmeti ; $x_2$-raztezek druge vzmeti )

$$x_0 = \frac{ma}{k_0} \quad ; \quad x_1 = \frac{ma}{k_1} \quad ; \quad x_2 = \frac{ma}{k_2}$$

$$\frac{ma}{k_0} = ma\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

Prožnostna konstanta zaporedno vezanih vzmeti je:

$$k_0 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Nihajni čas je torej:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}} = \underline{\underline{0{,}49s}}$$

b. Klado premaknemo za $x_0$ v desno, desna vzmet se za $x_0$ skrči, leva pa za $x_0$ raztegne.Sila je torej enaka:

$$F = ma = k_1 x_0 + k_2 x_0 = k_0 x_0$$

Konstanta prožnosti tako vezanih vzmeti je :

$$k_0 = k_1 + k_2$$

Nihajni čas : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = \underline{\underline{0{,}16s}}$