- Dejali smo, da je pomen stavkov najlaže ulovljiv, če določimo pogoje, pri katerih je nek stavek resničen.
- Temu smo dejali resničnostni pogoji.
- Pri stavkih in povedih bomo zato govorili o njihovi resničnosti oz. neresničnosti.
  - Poved (1) je tako očitno resnična, poved (2), pa očitno neresnična (saj Slovenija nima (trenutnega) kralja. In ker Slovenija nima kralja, seveda tudi Borut Pahor ne more biti kralj Slovenije). V kolikor tega ne omenimo posebej, bomo resničnost vedno ocenjevali glede na našo zunajjezikovno realnost.

(1) *Boris Pahor je slovenski pisatelj.*
(2) *Borut Pahor je trenutni slovenski kralj.*

Nekaj osnovnih logičnih operatorjev.

$\neg$ negacija = 'ni res da' (uporabljali bomo tudi znak '~')
$\land$ konjunkcija = 'in' (uporabljali bomo tudi znak '&')
$\lor$ disjunkcija = 'ali' (uporabljali bomo tudi znak 'V')
$\rightarrow$ implikacija = 'če … potem ...'
$\leftrightarrow$ ekvivalenca = 'če in samo če … potem ...'

Negacija je edini konektor/operator, ki se nanaša le na eno propozicijo. Propozicije so v logiki približni utrezniki stavkov. Propozicije so enote, katerim lahko izračunamo/določimo resničnost. Za propozicije bomo uporabljali spremenljivke 'p,q,r, …'.

V logiki imajo zgoraj opisane konjunkcije pomen določen s spodnjimi resničnostnimi tabelami. 't' v tabeli pomeni 'resnično' (true), 'f' pomeni 'neresnično' (=false). Namesto t/f se lahko uporablja tudi 1/0 (1=resnično, 0=neresnično).

(3a)

p	**$\neg$p**
t	f
f	t

(3b)

p	**q**	**p $\land$ q**
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	f

(3c)

p	**q**	**p $\lor$ q**
t	t	t
t	f	t
f	t	t
f	f	f

To lahko skušamo razumeti tudi s pomočjo primerov. *p* in *q* sta spremenljivki za propozicije in torej zamenjujeta celotne stavke. Recimo, da namesto spremenljivke *p* uporabimo stavek 'Danes pada dež.'. Če je ta stavek resničen, potem njegovo zanikanje 'Danes ne pada dež.' seveda ni resničen in obratno. Torej je vrednost točno taka, kot je prikazana v tabeli (3a).

Dodajmo k stavku *p* = 'Danes pada dež.' še stavek *q* = 'Peter ima odprt dežnik.'. Sedaj lahko preverimo naše konektorje disjunkcije in konjunkcije. Poved 'Danes pada dež in hkrati ima Peter odprt dežnik.' je resnična le v primeru, ko je res tako to, da ima Peter dežnik, kot to, da danes pada dež. Celotna poved je neresnična tudi v primeru, ko pada dež, Peter pa nima dežnika oz. ko Peter ima dežnik, vendar dežja ni. To je zopet tako, kot prikazuje tabela (3b).

Logična disjunkcija nima tako natančnega ustreznika v naravnem človeškem jeziku. Slovenski 'ali' namreč včasih razumemo kot izključujoči 'ali', pa tudi sicer ga ne moremo najlažje uporabiti pri povezovanju stavkov. Pravi izključujoči 'ali' je v slovenščini 'ali pa' oz. 'bodisi'. Primerjaj spodnje primere.

(4) a. ???Danes pada dež ali Peter ima odprt dežnik.
b. Danes pada dež ali pa ima Peter odprt dežnik.
c. Bodisi danes pada dež bodisi ima Peter odprt dežnik.
d. Ali danes pada dež ali pa ima Peter odprt dežnik.

Povedi (4b-d) so vse izključujoče disjunkcije, saj celotna poved ni resnična, ko sta resnična oba povezana stavka. Tabela za izključujočo disjunkcijo je podana v (5).

(5)

p	q	p ⊕ q
t	t	f
t	f	t
f	t	t
f	f	f

Negacija, konjunkcija in disjunkcija so trije osnovni konektorji, s katerimi lahko načeloma opišemo vse ostale konektorje. Že konjukcijo in disjkuncijo lahko opišemo eno z drugo s pomočjo negacije. Negacija konjunkcije je namreč enaka konjunkciji negacij, (6). To je prikazano tudi z resničnostnimi tabelami v (7). To sta tako imenovana De Morganova zakona.

(6) $\neg(p \land q) = \neg p \lor \neg q$ (pa tudi obratno: $\neg(p \lor q) = \neg p \land \neg q$)

(7a)

p	**q**
t	t
t	f
f	t
f	f

(7b)

p ∧ q	**¬(p ∧ q)**
t	f
f	t
f	t
f	t

(7c)

¬p	**¬q**	**¬p ∨ ¬q**
f	f	f
f	t	t
t	f	t
t	t	t

Ogledali si bomo še dva logična konektorja, implikacijo in ekvivalenco. Implikacijo bomo zapisali s puščico '→', ekvivalenco pa z obojestransko puščico '↔'. V naravnem jeziku je približni ustreznik implikacije 'p → q' zveza 'če p potem q'. Dejali bomo, da je 'p' pogoj', 'q' pa posledica oz. konsekvenca. Kakor je prikazano v tabeli (8c) je logični ustreznik implikacije 'p → q' formula '¬p ∨ q'.

(8a)

p	**q**
t	t
t	f
f	t
f	f

(8b)

p → q
t
f
t
t

(8c)

¬p	**q**	**¬p ∨ q**
f	t	t
f	f	f
t	t	t
t	f	t

Če se vprašamo, kdaj je resničen ustreznik implikacije 'p → q', v katerem smo spremenljivke zamenjali z našimi propozicijami 'Danes pada dež' in 'Peter ima odprt dežnik', potem lahko vidimo, da je celotna poved vsekakor resnična, ko sta resnična tako pogoj kot posledica in vsekakor neresnična, ko je pogoj izpolnjen (torej resničen), posledica pa ni resnična.

(9) Če pada dež, potem ima Peter odprt dežnik

- poved je resnična, če je res, da pada dež, in če je tudi res, da ima Peter odprt dežnik.
- Poved je neresnična, če je res, da pada dež, in hkrati ni res, da ima Peter odprt dežnik

Morda je manj očitno, kaj storiti v primeru, ko osnovni pogoj ni izpolnjen, torej, kaj storiti, ko v našem primeru ni res, da pada dež. Trdili bomo, da v primeru, ko pogoj ni izpolnjen, konektor ne pove nič o resničnosti ali neresničnosti posledice, zaradi česar bomo rekli, da je v takem primeru celotna poved resnična. Torej, poved je resnična neglede na resničnost posledice, čim je pogoj neresničen. Če namreč ni res, da pada dež, mi ne moremo reči prav nič o resničnosti ali neresničnosti posledice na podlagi povedi (9). Sedaj ko smo povedali, kdaj vse je poved resnična, lahko pridemo do zgornjega zapisa implikacije z disjunkcijo tudi povsem intuitivno. Implikacija je namreč resnična v primeru, ko je pogoj neresničen, ali pa, ko sta resnična tako pogoj kot posledica. To lahko zapišemo kot (10):

(10)	¬p V (p & q) =	(distribucija)
	(¬p V p) & (¬p V q) =	((¬p V p) je tautologija, saj je vedno resnična. To pomeni, da jo lahko opustimo, saj ne bo vplivala na resničnost celotne konjunkcije. Konjunkcija je resnična le v primerih, ko sta obe propoziciji v konjunkciji resnični. Čim je ena od obeh konjunkcij vedno resnična, pomeni, da je resničnost konjunkcije v celoti odvisna od druge propozicije, torej tiste, ki ni tautologija.)
	¬p V q	

Nasprotje tautologiji je kontradikcija. Primer kontradikcije je 'p & ¬p'. Podobno kot velja za tautologijo, da jo namreč lahko opustimo iz konjunkcije, saj izraz, ki je vedno resničen ne more vplivati na resničnost cele konjunkcije, velja za kontradikcijo, da jo lahko opustimo iz disjunkcije, saj izraz, ki je vedno neresničen, ne vpliva na resničnost celotne disjunkcije.

(11a)

p	**¬p**	**p V ¬p**
t	f	t
f	t	t

(11b)

p	**¬p**	**p & ¬p**
t	f	f
f	t	f

(12) ((p & ¬p) V q) ↔ q
(13) ((p V ¬p) & q) ↔ q

Zadnji konektor, ki si ga bomo ogledali je ekvivalenca. Ekvivalenca je resnična v primerih, ko imasta obe propoziciji enako resničnostno vrednost, torej, ko sta obe ali resnični ali neresnični (torej je na nek način enakovredna enačaju). Intuitivno ekvivalenco lahko zapišemo z dvema pogojema – $(p \& q) \mathrm{V} (\neg p \& \neg q)$. Ustreznik ekvivalence v slovenščini je veznik 'samo če' oz. 'če in samo če'. Lahko pa bi rekli tudi kaj na temo 'je identično z' ali kaj podobnega. Ekvivalenco lahko zapišemo tudi z daljišim izrazom '$(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p)$', kar je prikazano v (14c). Izraz pomeni, da sta v ekvivalenci obe propoziciji obenem pogoja in posledica ena drugi. Da za prvo propozicijo velja, da je pogoj za drugo in obratno.

(14a)

p	**q**
t	t
t	f
f	t
f	f

(14b)

p ↔ q
t
f
f
t

(14c)

p→ q	**q → p**	**(p → q) & (q → p)**
t	t	t
f	t	f
t	f	f
t	t	t

Če sledimo temu, kar vemo o enakosti med posameznimi izrazi, lahko skušamo zgornji intuitivni rezultat izpeljati iz (14c).

(15)	$(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p) =$	(implikacijo zamenjamo z disjunkcijo)
	$(\neg p \mathrm{V} q) \& (\neg q \mathrm{V} p) =$	(disjunkcija je komutativna)
	$(\neg p \mathrm{V} q) \& (p \mathrm{V} \neg q) =$	(zakoni distribucije)
	$(\neg p \& (p \mathrm{V} \neg q)) \mathrm{V} (q \& (p \mathrm{V} \neg q)) =$	(zakoni distribucije)
	$((\neg p \& p) \mathrm{V} (\neg p \& \neg q)) \mathrm{V} ((q \& p) \mathrm{V} (q \& \neg q)) =$	$((p \& \neg p)$ je kontradikcija)
	$((\text{„f“} \mathrm{V} (\neg p \& \neg q)) \mathrm{V} ((q \& p) \mathrm{V} (q \& \neg q)) =$	$((q \& \neg q)$ je kontradikcija)
	$((\text{„f“} \mathrm{V} (\neg p \& \neg q)) \mathrm{V} ((q \& p) \mathrm{V} \text{„f“})) =$	(podobno kot smo tautologijo
	$(((\neg p \& \neg q)) \mathrm{V} ((q \& p))) =$	opustili iz konjukcije, lahko tukaj
	$((\neg p \& \neg q) \mathrm{V} (q \& p)) =$	iz disjunkcije damo kontradikcijo,
	$((p \& q) \mathrm{V} (\neg p \& \neg q)) =$	saj ne vpliva na resničnost izraza.)
	$(p \& q) \mathrm{V} (\neg p \& \neg q)$	

Z opuščanjem oklepajev in komutativnostjo disjunkcije pridemo v zadnji vrstici do želenega rezultata. Naša kompleksna poved $(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p)$ je resnična le v primeru, ko sta obe propoziciji p in q resnični, $(p \& q)$, ali pa ko sta obe neresnični, $(\neg p \& \neg q)$. Do tega istega rezultata smo prišli zgoraj tudi s pregledovanjem tabel.