Predikatna logika

S predikatno logiko bomo skušali zapisati pomen naših stavkov. Spustili se bomo torej pod stavčno mejo, kjer smo se ustavili s propozicijami. Za propozicije smo rekli, da so pomenske enote, ki so primerljive s stavki, saj jim tako kot stavkom in povedim lahko izračunamo resničnostne pogoje. Vendar pa s propozicionalno logiko ne moremo opisati pomena samih stavkov.

Tu di bomo pomagali z nasleodnjo intuicijo. Vsak stavek je sestavljen iz osebka in predikata (do tega smo prišli že pri skladnji). Predikat nadalje lahko razumemo kot množico. Predikat v stavku *Peter je visok*, lahko razumemo kot množico vseh visokih oseb (ali stvari). Za cel stavek pa lahko rečemo, da nam pove, da je član te množice vseh visokih oseb tudi Peter. Množice bomo opisali s tako imenovanimi karakterističnimi funkcijami.

Karakteristična funkcija neke množice je funkcija, ki za vse elemente te množice da vrednost 1 (ali T, se pravi resnično) in za vse ostale argumente, ki niso člani te množice, vrednost 0 (ali F, se pravi neresnično).

Stavek *Peter je visok*, lahko torej zapišemo takole – *visok*(Peter). Predikat 'je visok' smo zapisali kot funkcijo, ki vzame za svoj argument Petra. (funkcije v matematiki se piše takole *f(x)*). Spodaj je še nekaj primerov zapisa slovenskih stavkov na ta „predikaten“ način.

(1)	*Peter je doma.*		je-doma(Peter)
	Janez je utrujen.		utrujen(Janez)
	Peter in Pavel sta prijatelja.		sta-prijatelja(Peter-in-Pavel)
		ali	sta-prijatelja(Peter, Pavel)
	Medved Jaka je ulovil volka Vida.		ulovil(medved Jaka, volk Vid)
	Maša gleda Slavkota.		gleda(Maša, Slavko)

Poleg prepisa povedka v funkcijo lahko v predikatni logiki uporabljamo tudi vse logične operatorje, ki smo jih spoznali pri prepozicionalni logiki. Recimo negacijo, (2), konjunkcijo (3) itd.

(2)	*Petra ni doma.* = ni res, da je Peter doma	¬je-doma(Peter)
	Janez ni utrujen.	¬utrujen(Janez)
	Maša ne gleda Slavkota.	¬gleda(Maša, Slavko)
	…	
(3)	*Peter in Janez sta visoka.*	visok(Peter) & visok (Janez)
	Maša je poljubila Vida in Črta.	poljubila(Maša, Vid) & poljubila(Maša, Črt)
	...	

Do sedaj smo uporabljali le imena. Imena imajo direktnega nanosnika, kar pa ne velja za običajne samostalnike. Kakor je nakazano v (4), so tudi običajni samostalniki predikati, njihov pomen pa je torej množica vseh oseb ali stvari, za katere velja, da so X.

(4)	*Peter je advokat.*	advokat(Peter)
	Janez je študent.	študent(Janez)
	Jaka je medved.	medved(Jaka)
	…	

Če torej zapišemo stavek (*En*) *študent je utrujen*, ne vemo, kako bi ga zapisali v predikatni logiki, saj sta tako *študent* kot *utrujen* predikata. Seveda ne moremo zapisati niti *študent(utrujen)* niti *utrujen(študent)*. Niti *študent* niti *utrujen* ne more biti argument drugemu predikatu, saj ne določa konkretnega elementa, za katerega bi lahko ugotavljali, ali je član množice vseh študentov oz. vseh, ki so utrujeni.

Načeloma bi lahko zapisali *utrujen(en študent)*, saj samostalniška zveza *en študent* označuje le enega predstavnika množice vseh študentov. Podobno kot bi stavek brez nedoločnega člena lahko zapisali preprosto kot *utrujen(študent)*, saj osebek v stavku *Študent je utrujen* razumemo (tipično) določno, kar pomeni, da imamo v mislih točno enega študenta (vsaj v pogovorni slovenščini, samostalnika brez samostalniške zveze tipično razumemo določno, določna samostalniška zveza pa je referencialni izraz in se tudi v skladnji obnaša enako kot imena (prim. načelo C navezovalne teorije)). Seveda pa z zapisom *utrujen(en študent)* problem razumevanja samostalniške zveze s predikatom le prestavimo, saj sedaj ne vemo, kako naj interpretiramo *en študent*. Podobno ne vemo, naj razumemo stavke tipa *vsi študenti so utrujeni, mnogo študentov je utrujenih* in *nekaj študentov je utrujenih*, če bi jih prevedli preprosto z *utrujen(vsi študenti), utrujen(mnogo študentov)* oz. *utrujen(nekaj študentov)*. Razumevanje oklepaja se pri teh števnikih precej bolj zakomplicira.

Ideja je sledeča: vpeljali bomo spremenljivko, ki si jo bosta oba predikata delila, s tem si bomo zagotovili, da bomo iskali osebo, ki bo element obeh množic, ki ju določata dva predikata. Iskali bomo torej presek teh dveh množic. Različne števnike oziroma kvantifikatorje pa bomo zapisovali kot vpeljevalce spremenljivk. Števniki bojo določili, koliko elementov ene množice mora biti v preseku oziroma ali naj tisti predikat razumemo za vse elemente neke množice ali le za enega, nobenega, ali kaj vmes. Zapis (5) tako lahko preberemo – obstaja en tak x, za katerega velja, da je študent in da je utrujen.

(5) *Študent je utrujen.* $\exists$x [študent(x) & utrujen(x)]

Naš stavek z dvema predikatoma smo torej razbili na dve predikaciji – dve funkciji. Ker smo želeli doseči, da bo govora o isti osebi, smo obe funkciji povezali z istim argumentom – s spremenljivko. Čim smo v našo „formulo“ dodali spremenljivko, smo morali tudi povedati, kako to spremenljivko razumemo. Ali naj obstaja ena sama taka oseba, ali naj jih bo več. Zgoraj smo spremenljivko uvedli z *eksistencialnim* kvantifikatorjem/števnikom $\exists$, ki pove, da obstaja vsaj enak taka oseba ali stvar *x*.

Drug števnik, ki ga bomo uporabljali je univerzalni števnik oz. kvantifikator - $\forall$. Ta se veže malo drugače, saj argumenta, ki ju povezuje spremenljivka, nista enakovredna, kar je razvidno že iz samega pomena. *Vsi študenti so utrujeni* se da povedati tudi drugače: *če si študent, potem si utrujen*. Univerzalni števnik je univerzalni le za prvo množico, torej množico tistega predikata, ki je znotraj samostalniške zveze.

(6) *Vsi študentje so utrujeni.* $\forall$x [študent(x) $\rightarrow$ utrujen(x)]
=/= $\forall$x [utrujen(x) $\rightarrow$ študent(x)]
(7) *Vsi utrujeno so študentje.* $\forall$x [utrujen(x) $\rightarrow$ študent(x)]
=/= $\forall$x [študent(x) $\rightarrow$ utrujen(x)]

Formulo (6) preberemo takole: „Za vse x-e velja, da če so študenti, potem so utrujeni“. Če bi z univerzalnim števnikom uporabili konjunkcijo, kot pri eksistencialnem, če bi torej zapisali našo formulo takole $\forall$x [študent(x) & utrujen(x)], bi dobili pomen „za vsak x velja, da je študent in da je utrujen“, kar bi pomenilo, da je vsaka stvar, ki obstaja tako študent kot utrujena, kar pa zelo očitno ni pomen stavka *vsi študenti so utrujeni*.

Ko imamo v stavku prehodni glagol in imamo v obeh argumentih samostalniško zvezo s števnikom, bomo morali uporabiti dve spremenljivki in uporabiti dva števnika, ki bosta spremenljivki uvedla.

(8) *En fant je poljubil eno punco.* $\exists$x [fant(x) & $\exists$y [punca(y) & poljubil(x,y)]]
oz. $\exists$x$\exists$y [fant(x) & [punca(y) & poljubil(x,y)]]

Oba števnika smo dali na začetek zaradi preglednosti. Nadalje pa lahko zaradi asociativnosti konjunkcije (8) zapišemo tudi kot (9). (9) bomo prebrali kot 'Obstaja en tak x in en tak y, za katera velja, da je x fant, y punca in da je x poljubil y.

Dvočlena operacija '*' na množici S je asociativna, če za vsak x, y, z $\in$ S velja: (x * y) * z = x * (y * z).

(9) En fant je poljubil eno punco. $\exists x \exists y$ [fant(x) & punca(y) & poljubil(x,y)]

Implikacija ni asociativna (torej p → (q → r) =/= (p → q) → r), kar pomeni, da v primeru univerzalnih števnikov, tega zadnjega koraka ne moremo narediti. Paziti pa moramo na vrstni red obeh števnikov, ki mora odsevati vrstni red predikatov in konektorjev znotraj formule.

(10) *Vsi fantje so poljubili vse punce.* $\forall x \forall y$ [fant(x) → [punca(y) → poljubil(x,y)]]

To lahko preberemo takole, Za vse x-e in za vse y-e velja, da če je x fant potem velja, da če je y punca, potem velja, da je x poljubil y. Razlika v pomenu obrnjene formule morda ni najbolj očitna, vendar vsekakor obstaja. Podobno moramo paziti pri vrstnem redu števnikov, ko uporabljamo dva različna števnika. Tu je pomenska razlika precej bolj očitna. (11a) pomeni, da obstaja en tak fant, za katerega velja, da je poljubil vse punce (govora je torej o enem in istem fantu, ki je poljubil vse punce), medtem ko (11b) pomeni, da za vse punce velja, da jih je poljubil nek fant (ne nujno isti).

(11) *En fant je poljubil vse punce.*

a. $\exists x \forall y$ [fant(x) & [punca(y) → poljubil(x,y)]]

b. $\forall y \exists x$ [punca (y) → [fant(x) & poljubil(x,y)]]

Ko govorimo na splošno o teh formulah, lahko uporabljamo tudi spremenljivke za same predikate, te bomo zapisovali z velikimi tiskanimi črkami.

(12) $\exists x\ \forall y$ [P(x) & [Q(y) → R(x,y)]]