

Univerza v Novi Gorici
Fakulteta za aplikativno naravoslovje

Seminar

POSPEŠEVALNIK DELCEV KOT IZVOR SVETLOBE

Avtor: Jurij Urbančič

Mentor: prof. dr. Samo Stanič

Nova Gorica, 2011

1 UVOD

Pospeševalniki imajo že od svojega začetka pomembno vlogo v preučevanju strukture snovi, saj zagotavljajo curke nabitih delcev (običajno elektroni ali protoni) z dobro definiranimi lastnostmi, ki jih lahko uporabimo v eksperimentih z atomskimi jedri ali osnovnimi delci. Za to namenjene naprave so s časom postale vedno večje, predvsem zaradi potrebe po doseganju zelo visokih energij delcev in zdaj že presegajo velikost 10 km. V krožnih pospeševalnikih elektronov nad nekaj deset MeV pa pride do intenzivnega elektomagnetnega sevanja, ki ga imenujemo sinhrotronsko sevanje.

Seminar spada v sklop predmeta Pospeševalniki in transport nabitih delcev. Osnovni namen je izpeljava osnovnih enačb gibanja in izsevane moči nabitega delca v pospeševalniku, ter predstavitev sevanje skozi undulator.

2 LINEARNA MAGNETNA OPTIKA

Ko zgradimo pospeševalnik je nominalna trajektorija nabitega delca ustaljena. V primeru linearnih pospeševalnikov je smer gibanja ravna črta. Pri krožnih pospeševalnikih, kamor spada shranjevalni obroč, pa je smer gibanja sestavljena iz številnih krivulj povezanih z ravnimi predeli različnih dolžin. Da to dosežemo si pomagamo z elektromagnetnimi polji (E in B) v katerih naboj e s hitrostjo v občuti Lorentzovo silo

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \dot{\mathbf{p}}. \quad (2.1)$$

Fizikalne osnove usmerjanja in fokusiranja nabitih delcev, analogno s svetlobo, opisuje magnetna optika. Tukaj se bomo osredotočili na odklanjanje (dipolni magnet) in fokusiranje delcev (kvadrupolni magnet) in izpeljali njihove enačbe gibanja.

2.1 GIBANJE NABITEGA DELCA V MAGNETNEM POLJU

Smer gibanja delca je podana z uporabo Kartezničnega koordinatnega sistema $K = (x, z, s)$, katerega izodišče se premika skupaj s trajektorijo delca. Os vzdolž premikanja je s , medtem ko sta horizontalna in vertikalna os ustrezno označena kot x in z . Predpostavimo, da se delec giblje vzporedno z osjo s ($\mathbf{v} = v_s$) in da ima magnetno polje obliko $\mathbf{B} = (B_x, B_z, 0)$. Pri potovanju delca skozi polje, pride do ravnovesja med Lorentzovo $F_x = -ev_s B_z$ in centrifugalno silo $F_r = mv_s^2/R$. Tukaj m predstavlja maso delca in R radij ukrivljene trajektorije. Z uporabo $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ dobimo razmerje

$$\frac{1}{R(x, z, s)} = \frac{e}{p} B_z(x, z, s). \quad (2.2)$$

Če razširimo magnetno polje v bližini nominalne trajektorije, dobimo:

$$B_z(x) = B_{z0} + \frac{dB_z}{dx}x + \frac{1}{2!} \frac{d^2B_z}{dx^2}x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3B_z}{dx^3}x^3 + \dots \quad (2.3)$$

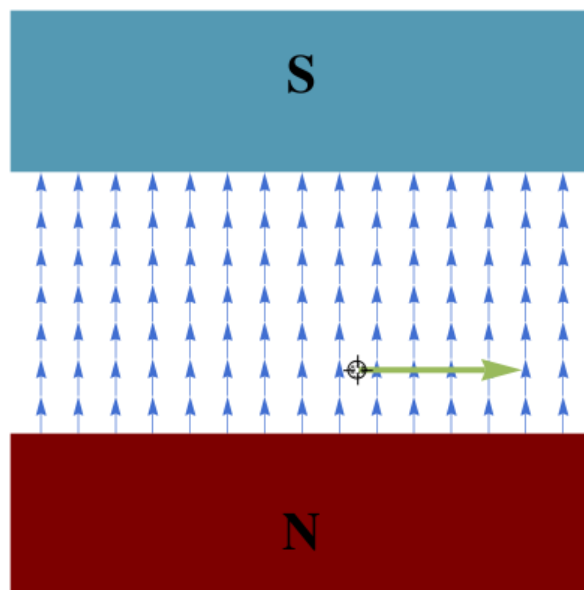
Množenje z e/p nam da

$$\begin{aligned} \frac{e}{p}B_z(x) &= \frac{e}{p}B_{z0} + \frac{e}{p} \frac{dB_z}{dx}x + \frac{1}{2!} \frac{e}{p} \frac{d^2B_z}{dx^2}x^2 + \frac{1}{3!} \frac{e}{p} \frac{d^3B_z}{dx^3}x^3 + \dots \\ &= \underbrace{\frac{1}{R}}_{\text{dipol}} + \underbrace{\frac{kx}{1}}_{\text{kvadrupol}} + \underbrace{\frac{1}{2!}mx^2}_{\text{sekstupol}} + \underbrace{\frac{1}{3!}ox^3}_{\text{oktupol}} + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Magnetno polje lahko obravnavamo kot vsoto multipolov. Če uporabimo samo prva dva multipola, imamo opravka z **linearno magnetno optiko** [1].

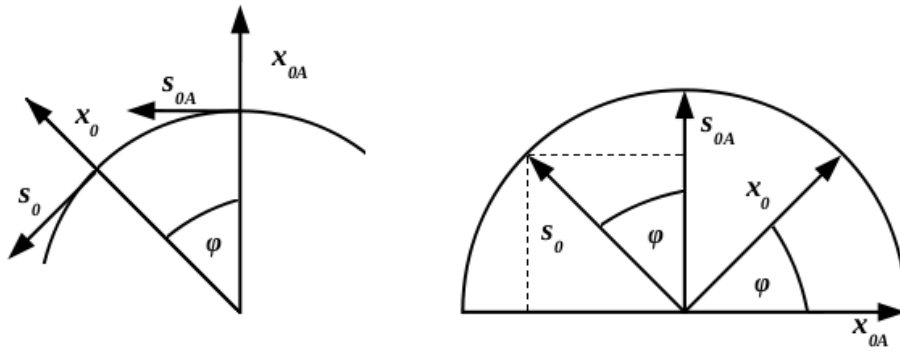
2.2 ENAČBA GIBANJA ZA DIPOLNI MAGNET

Za preusmerjanje nabitih delcev v krožno orbito se uporablja dipolne magnetne (Slika 1).



Slika 1: Prikaz nabitega delca v magnetnem polju dipolnega magneta.

Prečna velikost curka nabitih delcev v pospeševalniku je zelo majhna v primerjavi s samo velikostjo pospeševalnika. Zato je bolje upoštevati gibanje delcev v neposredni bližini idealne trajektorije. V področju kjer curek delcev ni raven zaradi magnetnega polja mora biti koordinatni sistem ustrezno rotiran. Naš namen je izpeljati splošno enačbo gibanja za ta sistem, ki je posledica Lorentzove sile (Enačba 2.1). Pri izpeljavi si pomagamo s Sliko 2.



Slika 2: Rotacija Kartezičnega koordinatnega sistema (x, z, s) okoli z -osi.

Takšen sistem rotira samo okoli osi z . Na začetku je sistem fiksiran v ravnini x - s z enotskima vektorjema x_{0A} in s_{0A} , ki sta po rotaciji za kot φ transformirana v vektorja x_0 in s_0 preko enačbe

$$\begin{aligned} x_0 &= x_{0A} \cos \varphi + s_{0A} \sin \varphi \\ s_0 &= -x_{0A} \sin \varphi + s_{0A} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Odvajanje po φ nam da

$$\begin{aligned} \frac{ds_0}{d\varphi} &= -x_0 \\ \frac{dx_0}{d\varphi} &= s_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Element poti $ds = R d\varphi$ ukrivljene trajektorije nam da

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt}. \quad (2.7)$$

Iz teh enačb izračunamo odvode enotskih vektorjev

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \frac{dx_0}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R} \dot{s}_0 \\ \dot{s}_0 &= \frac{ds_0}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{R} \dot{x}_0 \\ \dot{z}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Izvor koordinatnega sistema se premika skupaj z orbito preko $dr_0 = s_0 ds$. Časovni odvod nam da $\dot{r}_0 = \dot{s}_0$. Splošno obliko vektorja pozicije r lahko zapišemo v splošni obliki

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + x\mathbf{x}_0 + z\mathbf{z}_0. \quad (2.9)$$

S pomočjo Enačb 2.8 poiščemo prvi časovni odvod:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d(x\mathbf{x}_0)}{dt} + \frac{d(z\mathbf{z}_0)}{dt} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{x}\mathbf{x}_0 + x\dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{z}\mathbf{z}_0 + z\dot{\mathbf{z}}_0 \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}\mathbf{x}_0 + \left(1 + \frac{1}{R}\right)\dot{s}\mathbf{s}_0 + \dot{z}\mathbf{z}_0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Nato poiščemo še drugi časovno odvod:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d(\dot{x}\mathbf{x}_0)}{dt} + \frac{d\left(\left(1 + \frac{1}{R}\right)\dot{s}\mathbf{s}_0\right)}{dt} + \frac{d(\dot{z}\mathbf{z}_0)}{dt} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{x}\mathbf{x}_0 + \dot{x}\dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{x}\frac{1}{R}\dot{s}\mathbf{s}_0 + \left(1 + \frac{x}{R}\right)\ddot{s}\mathbf{s}_0 + \left(1 + \frac{x}{R}\right)\dot{s}\dot{\mathbf{s}}_0 + \ddot{z}\mathbf{z}_0 \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{x}\mathbf{x}_0 + \dot{x}\frac{1}{R}\dot{s}\mathbf{s}_0 + \dot{x}\frac{1}{R}\dot{s}\mathbf{s}_0 + \left(1 + \frac{x}{R}\right)\ddot{s}\mathbf{s}_0 - \left(1 + \frac{x}{R}\right)\dot{s}\frac{1}{R}\dot{s}\mathbf{x}_0 + \ddot{z}\mathbf{z}_0 \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{x}\mathbf{x}_0 + \frac{2\dot{x}}{R}\dot{s}\mathbf{s}_0 + \left(1 + \frac{x}{R}\right)\ddot{s}\mathbf{s}_0 - \left(1 + \frac{x}{R}\right)\frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{x}_0 + \ddot{z}\mathbf{z}_0 \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \left[\ddot{x} - \left(1 + \frac{x}{R}\right)\frac{\dot{s}^2}{R}\right]\mathbf{x}_0 + \left[\frac{2}{R}\dot{x}\dot{s} + \left(1 + \frac{x}{R}\right)\ddot{s}\right]\mathbf{s}_0 + \ddot{z}\mathbf{z}_0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Časovne odvode zamenjamo z odvodom glede na prostorsko koordinato s na sledeči način:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = x'\dot{s} \\ \ddot{x} &= \dot{x}'\dot{s} + x''\dot{s} = \frac{dx'}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} + x''\dot{s} = x''\dot{s}^2 + x'\ddot{s} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dt} = z'\dot{s} \\ \ddot{z} &= z''\dot{s}^2 + z'\ddot{s}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Če ta razmerja vstavimo v Enačbi 2.10 in 2.11 dobimo

$$\dot{\mathbf{r}} = x'\dot{s}\mathbf{x}_0 + \left(1 + \frac{1}{R}\right)\dot{s}\mathbf{s}_0 + z'\dot{s}\mathbf{z}_0 \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \left[x''\dot{s}^2 + x'\ddot{s} - \left(1 + \frac{x}{R}\right)\frac{\dot{s}^2}{R}\right]\mathbf{x}_0 + \left[\frac{2}{R}x'\dot{s}^2 + \left(1 + \frac{x}{R}\right)\ddot{s}\right]\mathbf{s}_0 \\ &+ \left[z''\dot{s}^2 + z'\ddot{s}\right]\mathbf{z}_0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Enačba gibanja nabitega delca v magnetnem polju bo imela tako obliko

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}). \quad (2.16)$$

Vektorski produkt $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$ je

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} x_0 & z_0 & s_0 \\ x'\dot{s} & z'\dot{s} & (1 + \frac{x}{R})\dot{s} \\ B_x & B_z & B_s \end{vmatrix} \\ \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} &= x_0 \left[z'\dot{s}B_s - (1 + \frac{x}{R})\dot{s}B_z \right] - z_0 \left[x'\dot{s}B_s - (1 + \frac{x}{R})\dot{s}B_x \right] \\ &+ s_0 \left[x'\dot{s}B_z - z'\dot{s}B_x \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Enačba 2.16 postane

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} \begin{pmatrix} z'\dot{s}B_s - (1 + \frac{x}{R})\dot{s}B_z \\ -x'\dot{s}B_s + (1 + \frac{x}{R})\dot{s}B_x \\ x'\dot{s}B_z - z'\dot{s}B_x \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Vpliv magnetnega polja na longitudinalno smer s je zanemarljiva, zato upoštevamo samo komponenti x in z . Za x_0 dobimo:

$$\begin{aligned} x''\dot{s}^2 + x'\ddot{s} - \left(1 + \frac{x}{R}\right) \frac{\dot{s}^2}{R} &= \frac{e}{m} \left(z'\dot{s}B_s - (1 + \frac{x}{R})\dot{s}B_z \right) \\ x'' + x' \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} - \left(1 + \frac{x}{R}\right) \frac{1}{R} &= \frac{e}{m\dot{s}} \left(z'B_s - (1 + \frac{x}{R})B_z \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

za z_0 pa:

$$\begin{aligned} z''\dot{s}^2 + z'\ddot{s} &= -\frac{e}{m} \left(x'\dot{s}B_s - (1 + \frac{x}{R})\dot{s}B_x \right) \\ z'' + z' \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} &= -\frac{e}{m\dot{s}} \left(x'B_s - (1 + \frac{x}{R})B_x \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

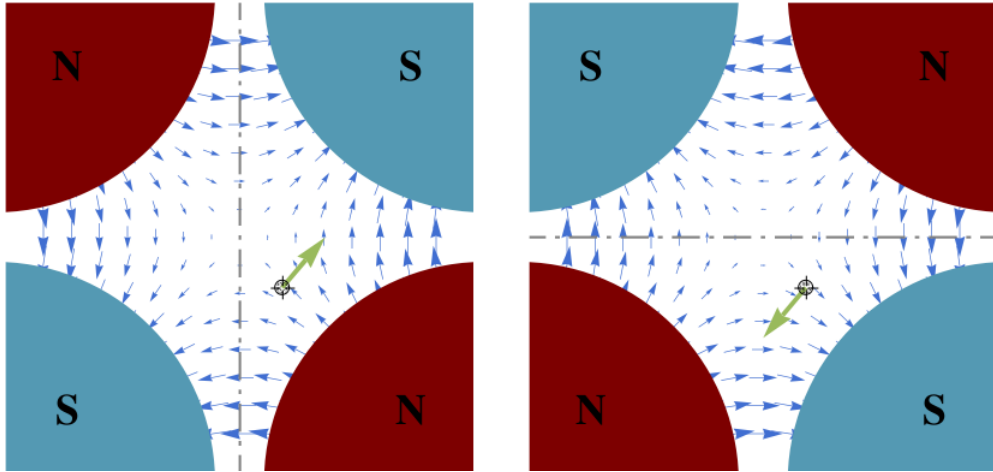
Če predpostavimo, da je $\ddot{s} \approx 0$, dobimo končno obliko

$$x'' - \left(1 + \frac{x}{R}\right) \frac{1}{R} = \frac{e}{m\dot{s}} \left(z'B_s - (1 + \frac{x}{R})B_z \right); \quad (2.21)$$

$$z'' = -\frac{e}{m\dot{s}} \left(x'B_s - (1 + \frac{x}{R})B_x \right). \quad (2.22)$$

2.3 ENAČBA GIBANJA ZA KVADRUPOLNI MAGNET

Za fokusacijo delcev poskrbijo kvadrupolni magneti. Kvadrupolni magneti lahko fokusirajo delce samo v eno smer (Slika 3).



Slika 3: Prikaz fokusacije kvadrupolnih magnetov v različne smeri.

Na podoben način poiščemo enačbo gibanja delca skozi kvadrupolni magnet. Vektor pozicije \mathbf{r} ima v tem primeru obliko

$$\mathbf{r} = xx_0 + zz_0 + ss_0. \quad (2.23)$$

Prvi ($\dot{\mathbf{r}}$) in drugi ($\ddot{\mathbf{r}}$) časovni odvod zapišemo kot odvod po prostorski koordinati s

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{r}' \dot{s}; \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{r}' \dot{s}) = \dot{s} \frac{d}{dt} \mathbf{r}' + \mathbf{r}' \ddot{s} = \dot{s}^2 \mathbf{r}'' + \mathbf{r}' \ddot{s}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

pri čemer sta

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \begin{pmatrix} x' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{r}'' &= \begin{pmatrix} x'' \\ z'' \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Iz II. Newtonovega zakona in Enačbe 2.16 za Lorentzovo silo, dobimo

$$\begin{aligned}
m\ddot{\mathbf{r}} &= e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \\
m(\dot{s}^2 \mathbf{r}'' + \mathbf{r}' \dot{s}) &= e\dot{s} \mathbf{r} \times \mathbf{B} \\
(\dot{s}^2 \mathbf{r}'' + \mathbf{r}' \dot{s}) &= \frac{e\dot{s}}{m} \begin{vmatrix} x_0 & z_0 & s_0 \\ x' & z' & 1 \\ B_x & B_z & B_s \end{vmatrix} \\
(\dot{s}^2 \mathbf{r}'' + \mathbf{r}' \dot{s}) &= \frac{e\dot{s}}{m} [x_0(z'B_s - B_z) - z_0(x'B_s - B_x) + s_0(x'B_z - z'B_x)]. \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Iz s_0 komponente dobimo:

$$\begin{aligned}
(0 + 1\dot{s}) &= \frac{e\dot{s}}{m} (x'B_z - z'B_x) \\
\dot{s} &= \frac{e\dot{s}}{m} (x'B_z - z'B_x). \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Komponenta x_0 je

$$(\dot{s}^2 x'' + \dot{s} x') = \frac{e\dot{s}}{m} (z'B_s - B_z). \quad (2.28)$$

Vstavimo Enačbo 2.27 in dobimo enačbo gibanja v x_0 smeri:

$$\begin{aligned}
(\dot{s}^2 x'' + \frac{e\dot{s}}{m} (x'B_z - z'B_x) x') &= \frac{e\dot{s}}{m} (z'B_s - B_z) \\
x'' &= \frac{e}{m\dot{s}} (z'B_s - B_z - x'^2 B_z - x'z'B_x) \\
x'' &= \frac{e}{m\dot{s}} (z'B_s - (1 + x'^2) B_z - x'z'B_x). \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Na podoben način poiščemo tudi enačbo gibanja v z_0 smeri:

$$\begin{aligned}
(\dot{s}^2 z'' + \dot{s} z') &= -\frac{e\dot{s}}{m} (x'B_s - B_x) \\
(\dot{s}^2 z'' + \frac{e\dot{s}}{m} (x'B_z - z'B_x) z') &= -\frac{e\dot{s}}{m} (x'B_s - B_x) \\
z'' &= -\frac{e}{m\dot{s}} (x'B_s - B_x - x'z'B_z - z'^2 B_x) \\
z'' &= -\frac{e}{m\dot{s}} (x'B_s - (1 + z'^2) B_x - x'z'B_z). \quad (2.30)
\end{aligned}$$

3 SEVANJE NABITEGA DELCA

Iz osnovnih zakonov elektrodinamike sledi, da pospešeni naboj seva energijo v obliki elektromagnetnega valovanja. Proces je ključen pri pridobivanju sinhrotronske svetlobe. Celotna izsevana moč pospešenega delca pa je podana z Larmorjevo enačbo [2]. Za razumevanje enačbe si pogledimo pospešeni naboj e z gibalno količino $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Predpostavili bomo, da je hitrost nerelativistična ($v \ll c$), nato pa bomo preučili sevanjem relativističnega delca.

3.1 NERELATIVISTIČNA LARMORJEVA ENAČBA

V mirovanju je električno polje naboja e v celoti radialno: $E = E_r$. Radialno komponento električnega polja na razdalji r zapišemo kot

$$E_r = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.1)$$

Predpostavimo, da začne naboj pospeševati s pospeškom a in je njegova hitrost nerelativistična ($v \ll c$). Ob času t bo razmerje med pravokotno in radialno komponento

$$\frac{E_{\perp}}{E_r} = \frac{at \sin \theta}{c},$$

kjer je θ kot med vektorjem pospeška in črto od delca do opazovalca. Iz tega razmerja in z zamenjavo $t = r/c$ dobimo pravokotno komponento

$$\begin{aligned} E_{\perp} &= \frac{at \sin \theta}{c} E_r \\ E_{\perp} &= \frac{ar \sin \theta}{c^2} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ E_{\perp} &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} a \frac{\sin \theta}{rc^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Opazimo, da je $E_r \propto 1/r^2$ in $E_{\perp} = 1/r$, kar pomeni, da samo E_{\perp} znantno prispeva k izsevanemu polju.

V vakuumu je Poyntingov vektor

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (3.3)$$

Če vsavimo $|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} |\mathbf{H}|$ dobimo

$$\begin{aligned}
|\mathbf{S}| &= \frac{c}{4\pi} 4\pi\epsilon_0 E^2 \\
|\mathbf{S}| &= c\epsilon_0 E^2 \\
|\mathbf{S}| &= c\epsilon_0 \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} a \frac{\sin\theta}{c^2} \right)^2 \\
|\mathbf{S}| &= \frac{e^2 a^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Celotno izsevano moč dobimo z integriranjem po celotni površini sfere okoli naboja

$$\begin{aligned}
P &= \int_{\text{povrsina}} |\mathbf{S}| dA \\
P &= \frac{e^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2\theta}{r^2} r \sin\theta d\theta r d\phi. \\
P &= \frac{e^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} 2\pi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \\
P &= \frac{e^2 a^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \frac{4}{3} \\
P &= \frac{e^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Iz II. Newtonovega zakona sledi, da je

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Iz gibalne količine dobimo

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= m\mathbf{v}, \\
d\mathbf{p} &= m d\mathbf{v}.
\end{aligned}$$

To pomeni, da II. Newtonov zakon zapišemo kot

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \\
\frac{d\mathbf{p}}{dt} &= m\mathbf{a}.
\end{aligned}$$

Pospešek tako zapišemo

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m} \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

To vstavimo v Enačbo 3.5 in dobimo končno obliko nerelativistične Larmorjeve enačbe

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2. \quad (3.6)$$

3.2 RELATIVISTIČNA LARMORJEVA ENAČBA

Poglejmo zdaj primer, ko se naboj približa svetlobni hitrosti c . Potrebujemo obliko Enačbe 3.6, ki je Lorentz invariantna. To dosežemo s transformacijo časa

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}, \quad (3.7)$$

kjer je

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.8)$$

in zamenjavo klasične gibalne količine \mathbf{p} s štiri-dimenzionalno gibalno količino relativistične elektrodinamike:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 &= \frac{dp}{dt} \frac{dp}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \frac{dp}{dt} &= - \frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

To pa lahko zapišemo kot

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2,$$

oziroma

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2, \quad (3.10)$$

če vemo, da je

$$\frac{dE}{d\tau} = v \frac{dp}{d\tau}.$$

Larmorjeva enačba tako postane

$$P = - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \left(\frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2 \right)$$

ali

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \left(\left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 \right). \quad (3.11)$$

Če vstavimo

$$\frac{dp}{dt} = \gamma m \dot{v} + \gamma^3 m \frac{v}{c} \left(\frac{v \cdot \dot{v}}{c} \right); \quad (3.12a)$$

$$\frac{dE}{dt} = \gamma^3 m v \cdot \dot{v} \quad (3.12b)$$

dobimo

$$\begin{aligned} P &= \frac{e^2 \gamma^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \left(\left(\gamma m \dot{v} + \gamma^3 m \frac{v}{c} \left(\frac{v \cdot \dot{v}}{c} \right) \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\gamma^3 m v \cdot \dot{v} \right)^2 \right) \\ P &= \frac{e^2 \gamma^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \left(\gamma^2 m^2 \dot{v}^2 + 2\gamma^4 m^2 \left(\frac{v \cdot \dot{v}}{c} \right)^2 + \gamma^6 m^2 \left(\frac{v}{c} \right)^2 \left(\frac{v \cdot \dot{v}}{c} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\gamma^6 m^2 (v \cdot \dot{v})^2 \right) \right) \\ P &= \frac{e^2 \gamma^2 m^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \left(\gamma^2 \dot{v}^2 + 2\gamma^4 \left(\frac{v \cdot \dot{v}}{c} \right)^2 + \gamma^6 \left(\frac{v}{c} \right)^2 \left(\frac{v \cdot \dot{v}}{c} \right)^2 - \gamma^6 m^2 \left(\frac{v \cdot \dot{v}}{c} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Del izraza zapišemo kot

$$\gamma^6 \left(\frac{v}{c} \right)^2 \left(\frac{v \cdot \dot{v}}{c} \right)^2 - \gamma^6 m^2 \left(\frac{v \cdot \dot{v}}{c} \right)^2 = \gamma^6 \left(\frac{v \cdot \dot{v}}{c} \right)^2 \left(\left(\frac{v}{c} \right)^2 - 1 \right)$$

in uporabimo

$$1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \frac{1}{\gamma^2},$$

da dobimo

$$\gamma^6 \left(\frac{v \cdot \dot{v}}{c} \right)^2 \left(\left(\frac{v}{c} \right)^2 - 1 \right) = -\gamma^4 \left(\frac{v \cdot \dot{v}}{c} \right)^2.$$

Ta del vstavimo v celoten izraz in pridemo do oblike enačbe

$$\begin{aligned} P &= \frac{e^2 \gamma^2 m^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \left(\gamma^2 \dot{v}^2 + 2\gamma^4 \left(\frac{v \cdot \dot{v}}{c} \right)^2 - \gamma^4 \left(\frac{v \cdot \dot{v}}{c} \right)^2 \right) \\ P &= \frac{e^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\dot{v}^2 + \gamma^2 \left(\frac{v \cdot \dot{v}}{c} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Izsevana moč je odvisna predvsem od kota med vektorjem hitrosti \vec{v} in vektorjem pospeška \dot{v} . V primeru linearnega pospeševalnika je $v \cdot \dot{v} = 0$. Za krožni pospeševalnik pa lahko Enačbo 3.13

zapišemo na naslednji način. Vstavimo

$$\frac{v}{c} = \beta, \quad \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{v}{c} \left(\frac{\mathbf{v}}{v} \right) = \beta \hat{v},$$

ki nam da

$$\begin{aligned} P &= \frac{e^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} \left(\dot{v}^2 + \gamma^2 \beta^2 (\hat{v} \cdot \dot{v})^2 \right) \\ P &= \frac{e^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} \left(\dot{v}^2 + \gamma^2 \beta^2 \dot{v}^2 \right) \\ P &= \frac{e^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 \left(1 + \gamma^2 \beta^2 \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Relativistični γ faktor je definiran kot

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.15)$$

Iz tega lahko izrazimo β^2 :

$$\begin{aligned} \beta^2 &= 1 - \frac{1}{\gamma^2} \\ \beta^2 &= \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \end{aligned}$$

in jo vstavimo v Enačbo 3.14:

$$\begin{aligned} P &= \frac{e^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 \left(1 + (\gamma^2 - 1) \right) \\ P &= \frac{e^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 \gamma^2 \\ P &= \frac{e^2 \gamma^6}{6\pi \epsilon_0 c^3} \dot{v}^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Relativistična gibalna količina je definirana kot

$$p = \gamma m v, \quad (3.17)$$

njen časovni odvod pa

$$\dot{p} = \gamma m \dot{v}. \quad (3.18)$$

Vstavimo Enačbo 3.18 v Enačbo 3.16

$$P = \frac{e^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 m^2 c^3} \dot{p}^2. \quad (3.19)$$

Uporabimo zvezo iz elektrodinamike za odvod gibalne količine nabitega delca

$$\dot{p} = evB = \frac{eB}{\gamma m} v, \quad (3.20)$$

kjer je B magnetno polje v katerem se delec nahaja. Enačbo 3.20 vstavimo v Enačbo 3.19 in uporabimo zvezo med gibanlo količino in energijo $E = pv$

$$P = \frac{e^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 m^2 c^3} \frac{q^2 B^2}{\gamma^2 m^2} p^2$$

$$P = \frac{e^4 \gamma^2 B^2}{6\pi \epsilon_0 m^4 c^3} \frac{E^2}{v^2}.$$

Zamenjamo γ z E/mc^2 in vstavimo enačbo za moč dipola, ki je

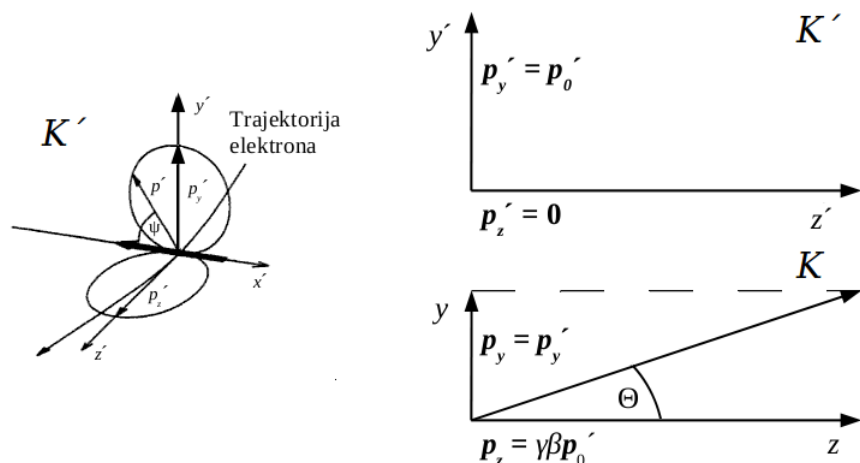
$$\frac{1}{R} = \frac{e}{p} B = \frac{eB}{mv} \quad (3.21)$$

in tako pridemo do izraza za izsevano moč nabitega delca med pospeševanjem

$$P = \frac{e^2 c}{6\pi \epsilon_0 m^4 c^8} \frac{E^4}{R^2} \quad (3.22)$$

3.3 KOTNA RAZPOREDITEV SEVANJA NABITEGA DELCA

Pri kotni porazdelitvi sinhrotronskega sevanja relativističnega elektrona ($v \approx c$, $\beta \approx 1$) moramo najprej transformirati referenčni sistem K' , ki se pomika vzporedno z elektronom. V tem sistemu je elektron pospešen samo vzdolž x -osi in sevanje ima karakteristike Hertzovega dipola (Slika 4).



Slika 4: Transformacija porazdelitve prostorske intenzitete sinhrotronskega sevanja iz lastnega sistema K' v laboratorijski sistem K .

Poenostavljeno si izberemo primer, ko je sevanje pravokotno glede na smer gibanja in pospeška. Opazimo foton, ki je izsevan paralelno z osjo y . Foton ima torej gibalno količino

$$\mathbf{p}'_y = \mathbf{p}'_0 = \frac{E'_s}{c} \mathbf{n}, \quad (3.23)$$

kjer je E'_s energija fotona in \mathbf{n} njegova smer gibanja. Štiri-dimenzionalna gibalna količina fotona ima obliko

$$P'_\mu = \begin{pmatrix} p_t \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_s/c \\ 0 \\ p'_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Smer gibanja fotona glede na mirujočega opazovalca dobimo z Lorentzovo transformacijo opisane štiri-dimenzionalne gibalne količine

$$P_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_s/c \\ 0 \\ p'_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E'_s/c \\ 0 \\ p'_0 \\ \gamma\beta E'_s/c \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Z uporabo razmerja (Enačba 3.23) med energijo in gibalno količino fotona ugotovimo, da je kot Θ emisije fotona glede na smer gibanja elektrona pogojen z enačbo

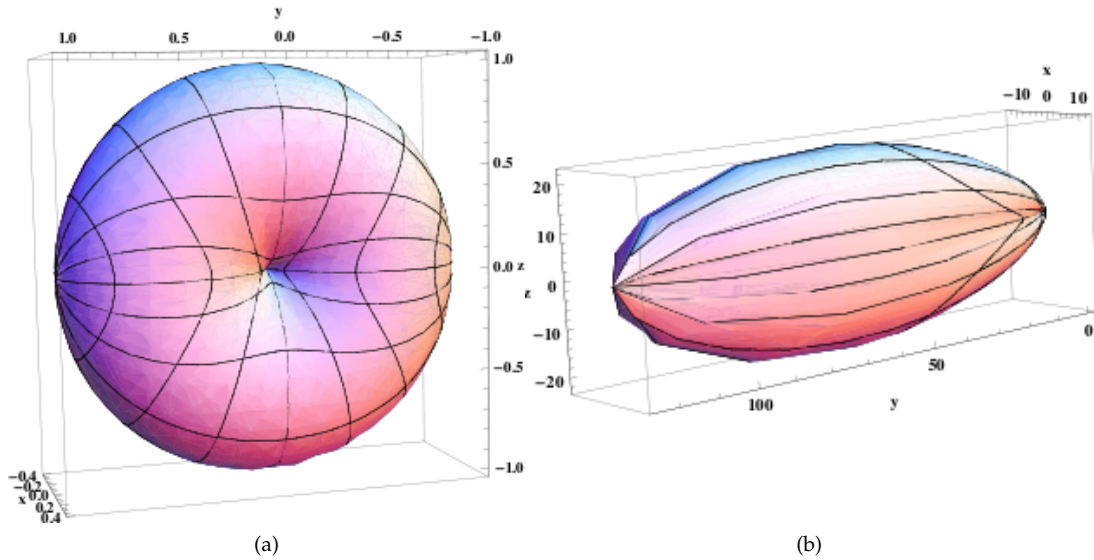
$$\tan \Theta = \frac{p_y}{p_z} = \frac{p'_0}{\beta\gamma p'_0} \approx \frac{1}{\gamma}. \quad (3.26)$$

Ker je Θ zelo majhen je $\tan \Theta \approx \Theta$. Aksialno-simetrična porazdelitev sevanje v sistemu K' se

transformira v ostro naprej usmerjeno distribucijo glede na opazovalca, z napol odprtim kotom $\Theta = 1/\gamma$. Porazdelitev moči sinhrotronskega sevanja glede na prostorski kot Ω pa je podana z enačbo [3]

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{(1 - \beta \cos \Theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \Theta \cos^2 \Phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \Theta)^2} \right]. \quad (3.27)$$

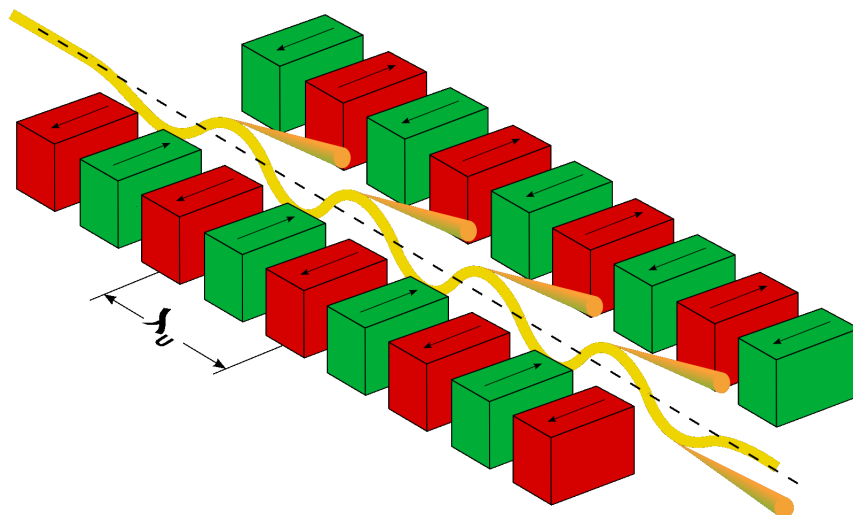
Vizualizacija te porazdelitve je prikazana na Sliki 5 [4].



Slika 5: Prikaz sinhrotronskega sevanja za β , ki je pravokoten na $\hat{\beta}$. Prikazana je porazdelitev izsevane moči naboja glede na prostorski kot Ω , ko je (a) $v \ll c$ in (b) $v \approx c$.

4 SEVANJE V UNDULATORJU

Da bi pridobili sevanje z večjo intenziteto uporabljamo undulatoje. Undulator je sestavljen iz alternirajočega zaporedja dipolnih magnetov. Z njim lahko pridobivamo kvazi-monokromatsko sinhrotronsko svetlobo. V takšni napravi delci sinusno oscilirajo pravokotno na smer gibanja in na magnetno polje (Slika 6).



Slika 6: Trajektorija delca v undulatorju.

Magnetno polje v njem ima obliko

$$B(z) = B_y = B_0 \cos(2\pi z / \lambda_u) = B_0 \cos(k_u z), \quad (4.1)$$

kjer je λ_u perioda undulatorja in $k_u = 2\pi / \lambda_u$ ustrezno valovno število. Delec, ki se giblje v undulatorju niha v smeri x s frekvenco

$$\Omega_u = k_u \beta c. \quad (4.2)$$

Če je polje B_0 relativno šibko, je trajektorija ultrarelativističnega delca skozi undulator

$$x(z) = a \cos(k_u z), \quad \frac{dx}{ds} = -a k_u \sin(k_u z) = -\psi_0 \sin(k_u z). \quad (4.3)$$

Smer gibanja je določena z amplitudo a in maksimalnim preusmeritvenim kotom $\hat{x}' = \psi_0$ glede na z -os. Lastnosti sevanja skozi undulator so močno odvisen od magnitude ψ_0 glede na kot izsevane svetlobe $1/\gamma$. To razmerje kvantificiramo s parametrom undulatorja K_u :

$$K_u = \frac{\psi_0}{1/\gamma} = \gamma \psi_0. \quad (4.4)$$

Glede na vrednosti K_u ločimo dva primera:

- za $K_u < 1$ je ψ_0 manjši od kota $1/\gamma$. Opraviti imamo s sevanjem *šibkega undulatorja*, ki ima kvazi-monokromatske lastnosti.
- za $K_u > 1$ je ψ_0 večji od kota $1/\gamma$. Posledično imamo opravka s sevanjem *močnega undulatorja*, katerega spekter je dosti bolj zapleten in vsebuje veliko harmonik.

Mi si bomo pogledali lastnosti sevanja samo za šibke undulatorje. Bolj natančna definicija K_u pa je

$$K_u = \frac{eB_0}{m_0ck_u}. \quad (4.5)$$

Polje undulatorja je periodično z dolžino

$$L_u = N_u\lambda_u, \quad (4.6)$$

kjer je N_u število period.

4.1 KOTNA RAZPOREDITEV SEVANJA V UNDULATORJU

Trenutna izsevana moč elektrona pri prečkanju undulatorja glede na splošen izraz Enačbe 3.22:

$$P(t') = \frac{2r_0c^3e^2E_e^2B_0^2\cos^2(\Omega_u t')}{3(m_0c^2)^3}, \quad (4.7)$$

kjer je $E_e = m_0c^2\gamma$ energija delca. Ne zanima nas hitro časovno spreminjanje moči, ampak povprečna vrednost. Zato uporabimo parametre undulatorja

$$L_u = N_u\lambda_u, \quad K_u = \frac{eB_0}{m_0ck_u}, \quad \langle B^2 \rangle = \frac{B_0^2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos^2(\Omega_u t') dt' = \frac{1}{2}B_0^2,$$

da izrazimo povprečno izsevano moč in energijo ene periode

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{r_0c^3e^2E_e^2B_0^2}{3(m_0c^2)^3} = \frac{r_0cm_0c^2\gamma^2k_u^2K_u^2}{3} = \frac{e^2c\gamma^2k_u^2K_u^2}{12\pi\epsilon_0} \\ U_u &= \frac{P_uL_u}{c} = \frac{r_0c^2e^2E_e^2B_0^2L_u}{3(m_0c^2)^3} = \frac{r_0m_0c^2\gamma^2k_u^2K_u^2L_u}{3} = \frac{e^2\gamma^2k_u^2K_u^2N_u}{6\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Kotno spektralno razporeditev gostote energije sevanja skozi undulator dobimo iz izraza [5]

$$\frac{d^2U}{d\Omega d\omega} = \frac{2r_p^2|\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2}{\mu_0c}, \quad (4.9)$$

kjer je $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ Fourierova transformiranka električnega polja undulatorja, r_p pa oddaljenost od opazovalca.

Povprečna razporeditev moči je

$$\frac{d^2 P_u}{d\Omega d\omega} = \frac{d^2 U}{d\Omega d\omega} \frac{c}{L_u} = \frac{2r_p^2 |\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2}{\mu_0 L_u}. \quad (4.10)$$

Iz tega dobimo spektralno razporeditev gostote moči za sevanje skozi undulator (podrobnejša izpeljava v [6])

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_u}{d\Omega d\omega} &= \frac{r_0 c m_0 c^2 k_u^2 K_u^2 \gamma^4}{\pi} \\ &\times \frac{[(1 - \gamma^2 \theta^2 \cos(2\phi))^2 + (\gamma^2 \theta^2 \sin(2\phi))^2]}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^5} \frac{N_u}{\omega_1} \left(\frac{\sin(\pi N_u \Delta\omega / \omega_1)}{\pi N_u \Delta\omega / \omega_1} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Oba izraza v oglatih oklepajih ustrezata horizontalnim in vertikalnim električnim poljem, σ in π pa načinu polarizacije. S pomočjo Enačbe 4.8, lahko izrazimo povprečno moč kot

$$\frac{r_0 c m_0 c^2 k_u^2 K_u^2 \gamma^4}{\pi} = P_u \frac{3\gamma^2}{\pi} \quad (4.12)$$

in uporabimo normalizirane funkcije kotnih razporeditev $F_{u\sigma}(\theta, \phi)$ in $F_{u\pi}(\theta, \phi)$

$$\frac{d^2 P_u}{d\Omega d\omega} = P_u \gamma^2 (F_{u\sigma}(\theta, \phi) + F_{u\pi}(\theta, \phi)) f_N(\Delta\omega) \quad (4.13)$$

z

$$F_{u\sigma}(\theta, \phi) = \frac{3}{\pi} \frac{(1 - \gamma^2 \theta^2 \cos(2\phi))^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^5}, \quad F_{u\pi}(\theta, \phi) = \frac{3}{\pi} \frac{(\gamma^2 \theta^2 \sin(2\phi))^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^5} \quad (4.14)$$

in spektralno funkcijo $f_N(\Delta\omega)$

$$f_N(\Delta\omega) = \frac{N_u}{\omega_1} \left(\frac{\sin(\pi N_u \Delta\omega / \omega_1)}{\pi N_u \Delta\omega / \omega_1} \right)^2, \quad \omega_1 = \frac{2\gamma^2 \Omega_u}{1 + \gamma^2 \theta^2}, \quad \Delta\omega = \omega - \omega_1. \quad (4.15)$$

Za $N_u \rightarrow \infty$ dobimo

$$f_N(\Delta\omega) \rightarrow \delta(\omega - \omega_1), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_N(\Delta\omega) d\omega = 1. \quad (4.16)$$

Da dobimo kotno razporeditev integriramo Enačbo 4.13 po deviaciji frekvence $\Delta\omega$. Za $N_u \gg 1$ je to omejeno samo na integral po spektralni funkciji $f_N(\Delta\omega)$:

$$\frac{dP_u}{d\Omega} = P_u \gamma^2 [F_{u\sigma}(\theta, \phi) + F_{u\pi}(\theta, \phi)] \int_{-\infty}^{\infty} f_N(\Delta\omega) d\omega. \quad (4.17)$$

Iz Enačbe 4.16 vidimo, da je intergal enak 1 in dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{dP_u}{d\Omega} &= P_u \gamma^2 [F_{u\sigma}(\theta, \phi) + F_{u\pi}(\theta, \phi)] \\
&= P_u \frac{3\gamma^2 [(1 - \gamma^2 \theta^2 \cos(2\phi))^2 + (\gamma^2 \theta^2 \sin(2\phi))^2]}{\pi (1 - \gamma^2 \theta^2)^5} \\
&= P_u \frac{3\gamma^2 [1 - 2\gamma^2 \theta^2 \cos(2\phi) + \gamma^4 \theta^4]}{\pi (1 - \gamma^2 \theta^2)^5}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Literatura

- [1] K. Willie; *The Physics of Particle Accelerators, and introduction*, Oxford University Press, 2005, p. 45
- [2] A. Lienard,: *L'Eclairage Elect.*, **16**, 5 (1898).
- [3] S. Y. Lee; *Accelerator Physics, Second Edition*, World Scientific, 2004, p. 426
- [4] "Synchrotron Radiation" from The Wolfram Demonstrations Project, Contributed by: Roger M. Jones; <http://demonstrations.wolfram.com/SynchrotronRadiation/>
- [5] A. Hofmann; *The Physics of Synchrotron Radiation*, Cambridge Univesity Press, 2004, p. 139
- [6] A. Hofmann; *The Physics of Synchrotron Radiation*, Cambridge Univesity Press, 2004, p. 135 - 139

Dodatni viri

- [7] M. Reiser; *Theory and Design of Charged Particle Beams*, WILEY-VCH, 2008
- [8] M. Conte & W. W. MacKay; *Introduction to the Physics of Particle Accelerators*, World Scientific, 1991